**«Динамические модели экономики»**

**1. Понятие производственной функции одной переменной, нескольких переменных.**

Производственная функция – это функция, независимая переменная которой принимает значения объемов затрачиваемого или используемого ресурса (фактов производства), а зависимая переменная – значения объемов выпускаемой продукции



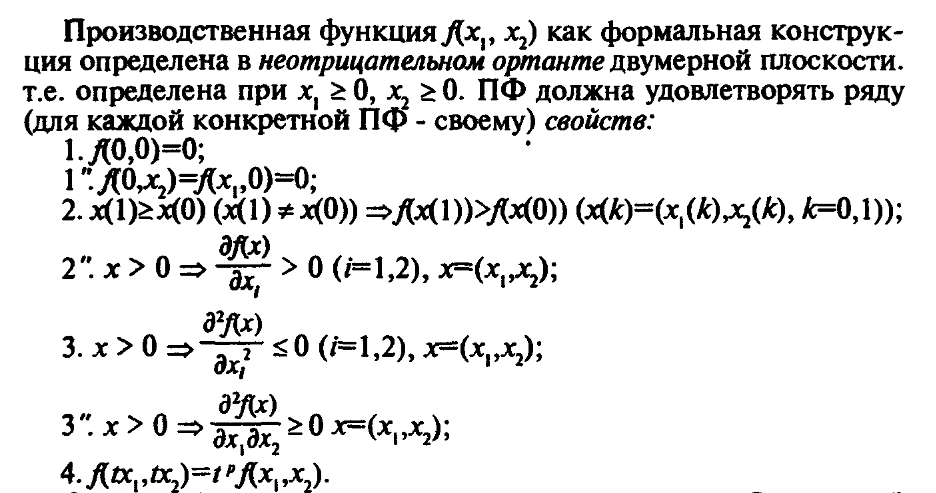
f(x) – функция одной переменной называется одноресурсной или однофакторной ПФ, ее область определения – множество неотрицательных действительных чисел. f – это характеристика производственной системы преобразующей ресурс в выпуск.

**2. Функция Кобба-Дугласа.**

Для моделирования отдельного региона или страны в целом часто используется ПФ вида , где a0, a1, a2 – параметры ПФ. Часто a1+a2 = 1. Данная ПФ называется ПФ Кобба-Дугласа (ПФКД). В приложениях ПФКД x1 = К равно объему используемого основного капитала. x2 – L затраты живого труда, тогда ПФКД приобретает следующий вид:



**3. Формальные свойства производственных функций.**



Свойство 1 означает, что без ресурсов нет выпуска.

Свойство 1” означает, что при отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска.

Свойство 2 означает, что с ростом затрат хотя-бы одного ресурса объём выпуска растет.

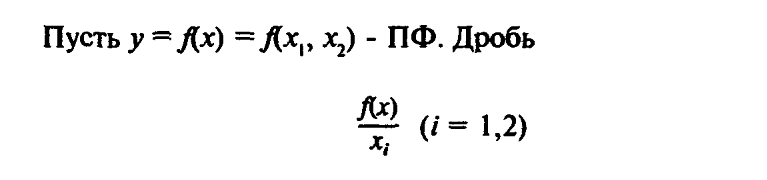
Свойство 2” означает, что с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет.

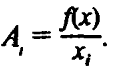
Свойство 3 означает, что при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает.

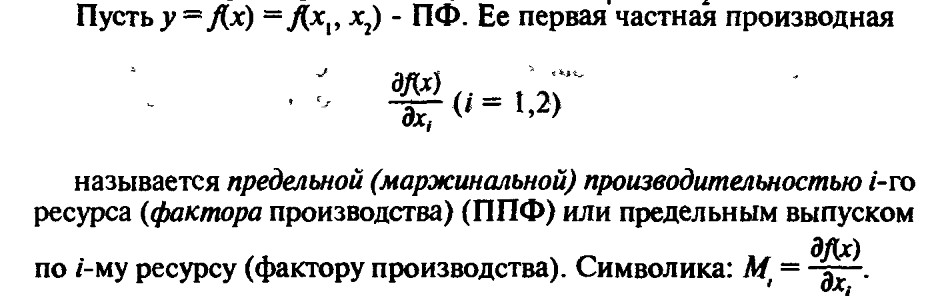
Свойство 3” означает, что при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает.

Свойство 4 означает, что ПФ является однородной функцией степени р > 0. При p > 1 с ростом масштаба производства в t раз объем выпуска возрастает в t^p раз. При p < 1 – падение эффективности производства. При p = 1 имеем постоянную эффективность производства.

**4. Предельные и средние значения производственной функции.**



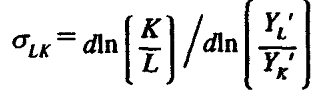
Называется средней производительностью i – го ресурса (фактора производства) (СПФ) или средним выпуском по i – му ресурсу. Символика 



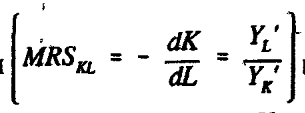
Следовательно, ППФ показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска y, если объем затрат xi i – го ресурса вырастает на одну единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

**5. Эластичность замещения факторов. Производственная функция CES.**

Обобщение ПФ Кобба-Дугласа может вестись в различных направлениях. Наиболее известным обобщением является функция CES или ПЭЗ, - функция с постоянной эластичностью замещения (constant elasticity of substitution). Эластичность замещения σ – это мера «кривизны» изоквант (линий уровня) ПФ. Точнее, «кривизну» измеряет величина 1/σ. Эластичность замещения труда капиталом

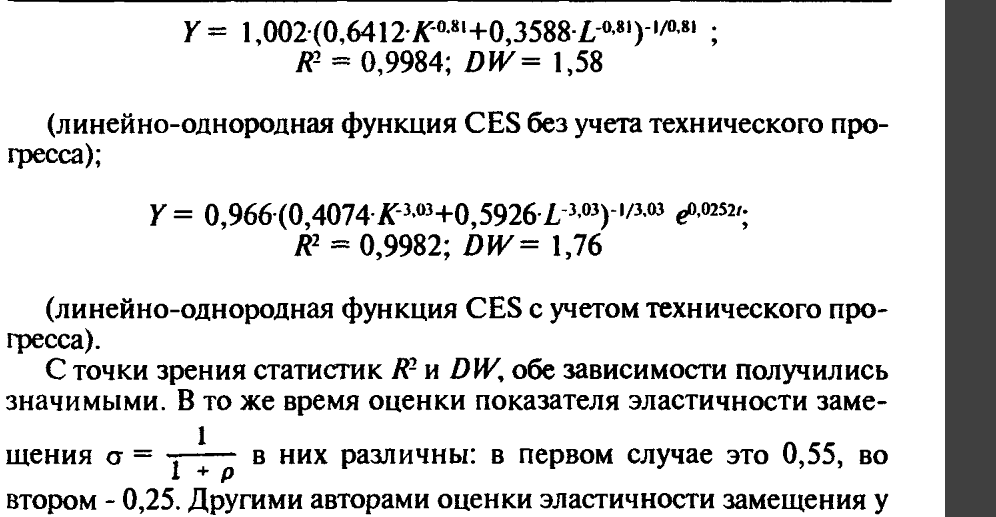


Показывает, на сколько процентов изменится капиталовооруженность (K/L) при изменении предельной нормы замены труда капиталом



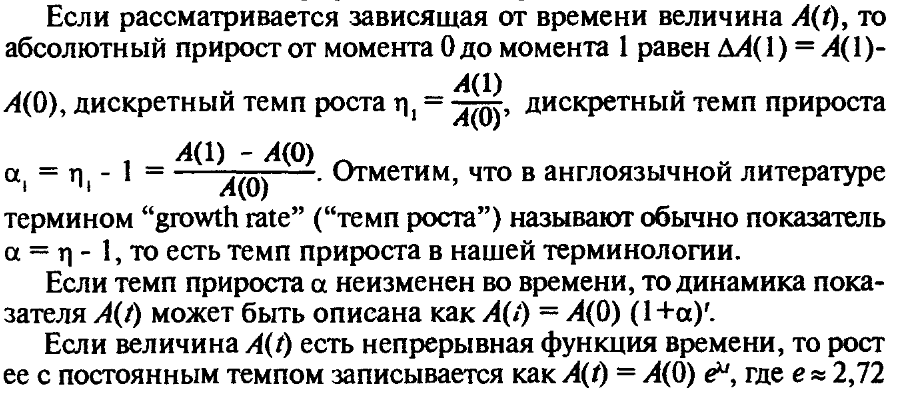
На 1 процент. Линейная ПФ имеет нулевую «кривизну» и, соответственно, бесконечную эластичность замещения y. Функция Кобба-Дугласа имеет эластичность замещения, равную единице. Функция Леонтьева имеет нулевую эластичность замещения: ресурсы в ней должны задаваться в заданной пропорции и не могут замещать друг друга.

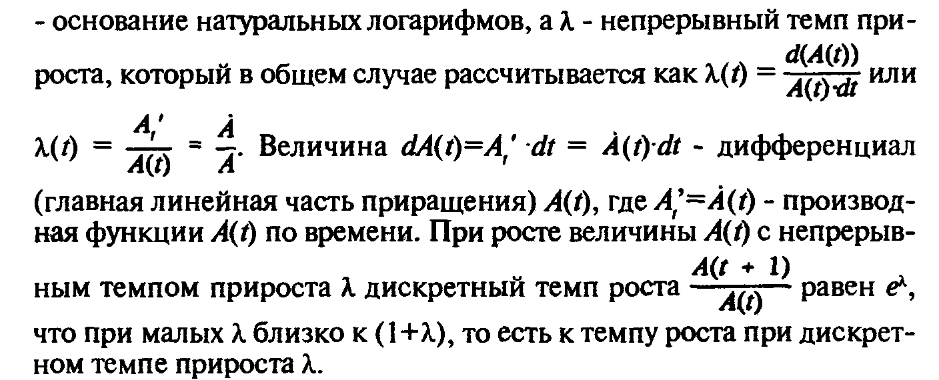
Советские ученые провели исследование для экономики СССР

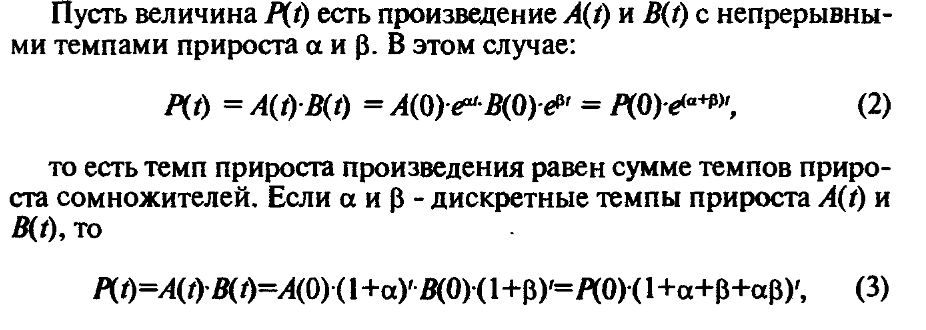


**6. Показатели экономической динамики.**

Показатели, характеризующие динамику экономического объекта, - это абсолютные приросты, темпы роста и прироста.



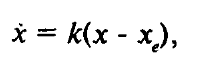




**7. Понятие динамического равновесия в экономике. Простейшая модель равновесия.**

В экономической теории важным является понятие равновесия, то есть такого состояния объекта, которое он сохраняет при отсутствии внешних воздействий. Задачи экономической динамики включают как описание процессов выхода к состоянию равновесию, так и процессов трансформации самого этого состояния под воздействием внешних сил. Рассмотрим простую экономическую систему в состоянии равновесия и опишем движение такой системы в непрерывном и дискретном случаях. В первом случае динамика системы описывается с помощью дифференциального уравнения, во втором – разностного уравнения.

Дифференциальное уравнение связывает изменения показателя со скоростью его движения x’. Будем считать, что скорость изменения показателя x пропорциональна величине его отклонения от равновесного значения Xe. Иными словами, чем дальше показатель отклонился от равновесного значения, тем быстрее он стремится вернуться к нему. Если в уравнении присутствует только первая производная x по времени, а сама связь линейна, то это линейное дифференциальное уравнение. Пусть оно имеет следующий вид:



где k – коэффициент. В этом уравнении kxe – свободный член; без него уравнение x’=kx называется однородным и его общее решение . Исходное неоднородное уравнение имеет частное решения и общего решения однородного уравнения, то есть .

Поведение в дискретном времени может быть описано с помощью разностного уравнения, связывающего величины x в соседние моменты времени, то есть и . Например в дискретной ситуации, можем использоваться разностное уравнение , решением которого является  Это решение может быть найдено как сумма общего решения для однородного уравнения  и частного решения  для исходного разностного уравнения; с учетом xt = x(0) при t = 0. При k < 0 система в случае отклонения от xe будем двигаться в направлении xe, при k > 0 – уходить ещё дальше от него. Равновесие устойчиво при -2 < k < 0 и неустойчиво при k > 0 или k < -2.

**8. Примеры моделей экономической динамики.**

Рассмотрим два примера моделей экономической динамики реализующих дискретный и непрерывный подходы.

Паутинообразная модель: (Дискретный подход)

Позволяет исследовать устойчивость цен и объемов товаров на рынке, описываемом традиционными кривыми спроса и предложения при наличии запаздывания во времени (лага). Исследуется поведение цен и объемов производства в том случае, если начальная точка не совпадает с равновесной. Вначале эту задачу можно решить графически, получив рисунок типа «Паутины». Задав некоторое первоначальное количество товара и цену, не совпадающие с точкой равновесия, будем последовательно наносить точки в соответствии с процедурой расчета модели, соединяя их линиями. Если кривая предложения круче, чем кривая спроса, то равновесие на таком рынке будет устойчивым, если наоборот, то неустойчивым. При равном наклоне цены на рынке будут испытывать регулярные колебания с постоянной амплитудой.

Модель Харрода – Домара.

Модель описывает динамику дохода Y(t), который рассматривается как сумма потребления C(t) и инвестиций I (t). Экономика закрытая, чистый экспорт и гос расходы не выделяются. Основная предпосылка модели роста – формула взаимосвязи между инвестициями и скоростью дохода.

**9. Паутинообразная модель, модель Харрода-Домара.**

Рассмотрим два примера моделей экономической динамики реализующих дискретный и непрерывный подходы.

Паутинообразная модель: (Дискретный подход)

Позволяет исследовать устойчивость цен и объемов товаров на рынке, описываемом традиционными кривыми спроса и предложения при наличии запаздывания во времени (лага). Исследуется поведение цен и объемов производства в том случае, если начальная точка не совпадает с равновесной. Вначале эту задачу можно решить графически, получив рисунок типа «Паутины». Задав некоторое первоначальное количество товара и цену, не совпадающие с точкой равновесия, будем последовательно наносить точки в соответствии с процедурой расчета модели, соединяя их линиями. Если кривая предложения круче, чем кривая спроса, то равновесие на таком рынке будет устойчивым, если наоборот, то неустойчивым. При равном наклоне цены на рынке будут испытывать регулярные колебания с постоянной амплитудой.

Модель Харрода – Домара.

Модель описывает динамику дохода Y(t), который рассматривается как сумма потребления C(t) и инвестиций I (t). Экономика закрытая, чистый экспорт и гос расходы не выделяются. Основная предпосылка модели роста – формула взаимосвязи между инвестициями и скоростью дохода.

**10. Модель Солоу.**

Производственная функция в этой модели нелинейна и обладает свойством убывания предельной производительности. Модель учитывает выбытие основного капитала. Модель включается в описание динамики трудовых ресурсов и технического прогресса. Решается задача максимизации уровня потребления на некотором множестве устойчивых траекторий.

Производственная функция: Доход зависит от капитала и труда. Предельная производительность факторов положительна, но убывает. Золотое правило: Необходимым условием максимума дифференцируемой функции является равенство нулю ее производной (правило выбора оптимального объема капитала для максимизации удельного объема потребления). Равен сумме нормы выбытия delta, темп роста численности занятых n и темп прогресса технического прогресса g.